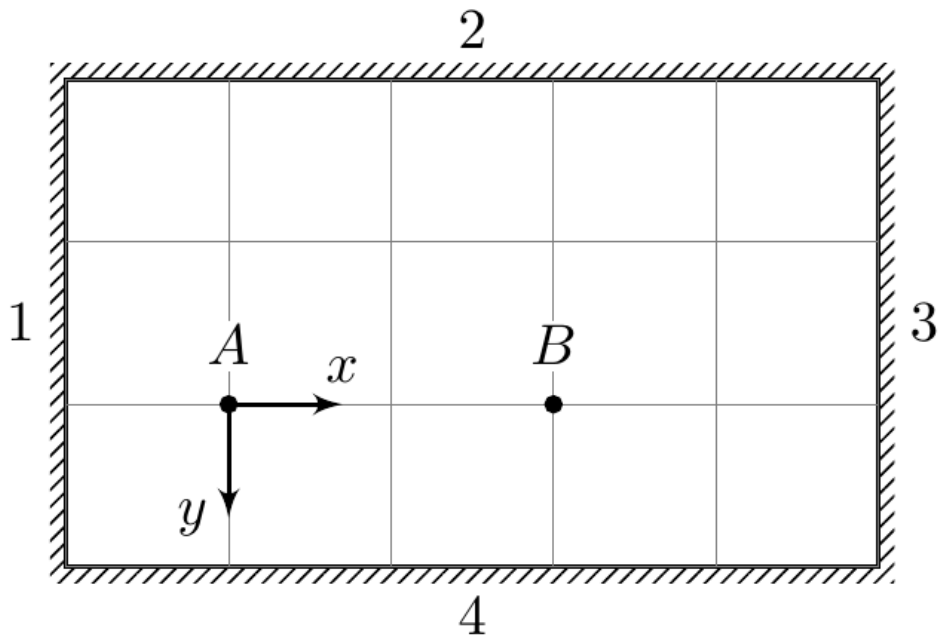




Найдите все возможные ориентации рамки, при которых шайба после одного удара попадёт из точки A в точку B , и для каждой из них определите угол между отрезком AB и ускорением свободного падения.

Пронумеруем стороны рамки и введём координаты x, y с началом в точке A , направив их вдоль и перпендикулярно отрезку AB .



Пусть координаты точки A равны $(0; 0)$, координаты точки B равны $(L; 0)$, а расстояние от точек до стороны — H . Будем искать проекции ускорения свободного падения g_x и g_y . Рассмотрим движение шайбы из A в B с отскоком от стороны 4. Из уравнения движения по оси y получим, что время падения из точки A до стенки равно $\sqrt{\frac{2H}{g_y}}$. После удара шайба будет лететь столько же по времени до точки B . Полное время составит:

$$t = 2\sqrt{\frac{2H}{g_y}}.$$

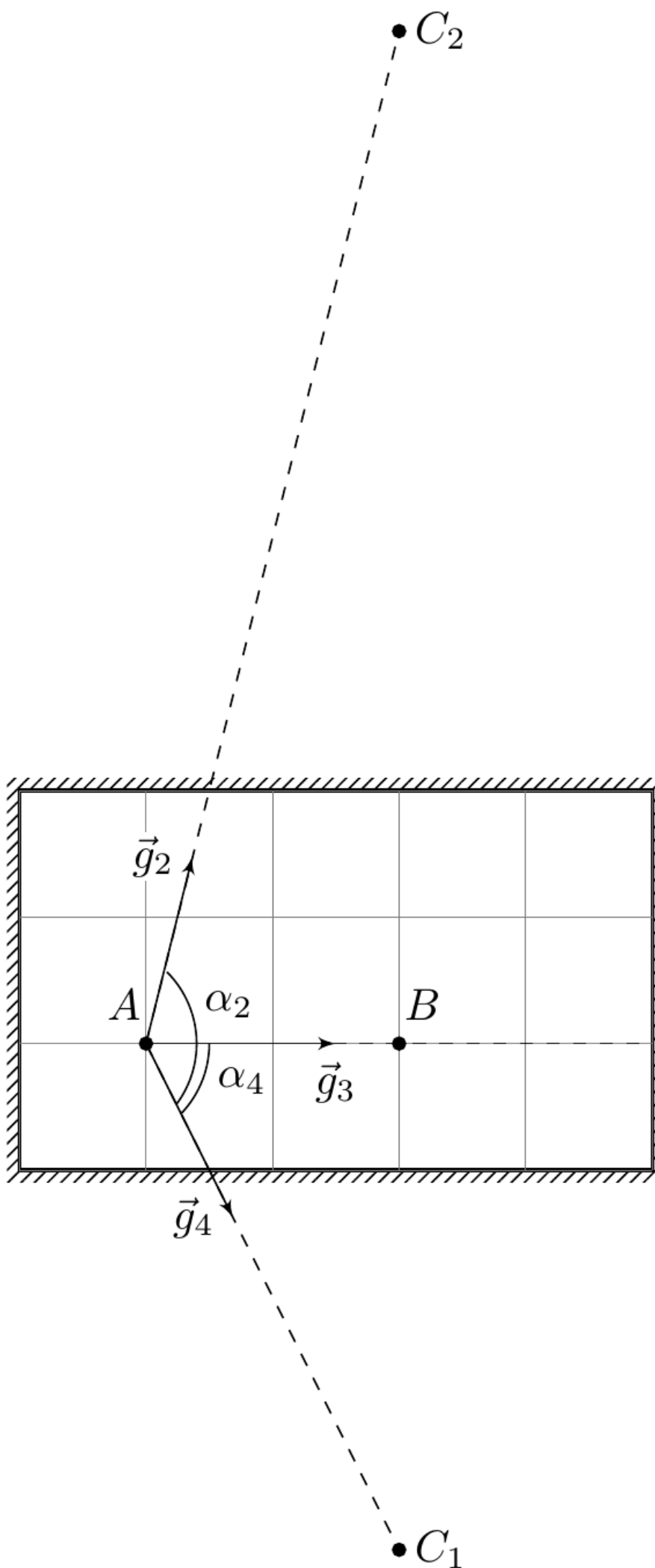
По оси x шайба движется равноускоренно, так как при упругом ударе проекция скорости на ось x не меняется.

$$L = g_x \frac{t^2}{2} = g_x \cdot \frac{4H}{g_y}.$$

Откуда получим:

$$\frac{g_x}{g_y} = \frac{L}{4H}.$$

В случае отскока от стенки 4 $L = 2l$ и $H = l$, где l — сторона заданной масштабной сетки. Из полученного отношения проекций ускорений легко найти направление \vec{g} . Например, можно отметить точку C_1 с координатами $(2l; 4l)$. Тогда \vec{g} будет направлено вдоль прямой AC_1 и, в частности, первая часть траектории шайбы будет лежать вдоль этой прямой. Аналогично можно поступить со стороной 2. В этом случае $L = 2l$ и $H = 2l$, тогда ускорение свободного падения будет направлено вдоль отрезка AC_2 , где координаты точки C_2 это $(2l; -8l)$. После отскока от стороны 1 шайба не сможет попасть в точку B , так как та расположена дальше точки A по оси x . По тем же соображениям отражение от стороны 3 подходит. Соответствующее этому случаю направление ускорения свободного падения будет вдоль оси x .



С помощью найденных в предыдущем пункте координат точек C_1 и C_2 вычислим углы между направлением AB и ускорением свободного падения:

Ответ:

$$\alpha_4 = \arctg 2 \approx 63^\circ, \alpha_2 = \arctg 4 \approx 76^\circ, \alpha_3 = 0^\circ.$$



1 ?? Найдите удлинения пружин Δx_1 , Δx_2 и упругой ленты Δx для двух значений внешней силы: $F = 1,0$ Н и $F = 20$ Н.

Пусть F_1 — сила упругости ленты и первой пружины, а F_2 — сила упругости второй пружины. Сила F , с которой растягивают данную систему, уравнивается данными силами F_1 и F_2 :

$$F = F_1 + F_2.$$

Закон Гука для пружин: $F_1 = k\Delta x_1$ и $F_2 = k\Delta x_2$. Суммарное удлинение первой пружины и ленты равно удлинению второй пружины:

$$\Delta x_1 + \Delta x = \Delta x_2.$$

Из этих уравнений получим:

$$\Delta x = \Delta x(F_1) = \frac{F}{k} - \frac{2}{k}F_1, \tag{1}$$

или

$$F_1(\Delta x) = \frac{F}{2} - \frac{k}{2}\Delta x. \tag{1'}$$

При $F_1 < 1$ Н лента ведёт себя как пружина с коэффициентом жёсткости $k_0 \approx 120$ Н/м, который можно определить с помощью коэффициента наклона касательной к начальному участку графика. Следовательно, зависимость удлинения ленты от растягивающей её силы можно выразить как:

$$F_1 = k_0\Delta x. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Delta x = \frac{F}{k} - \frac{2k_0}{k}\Delta x$$

или

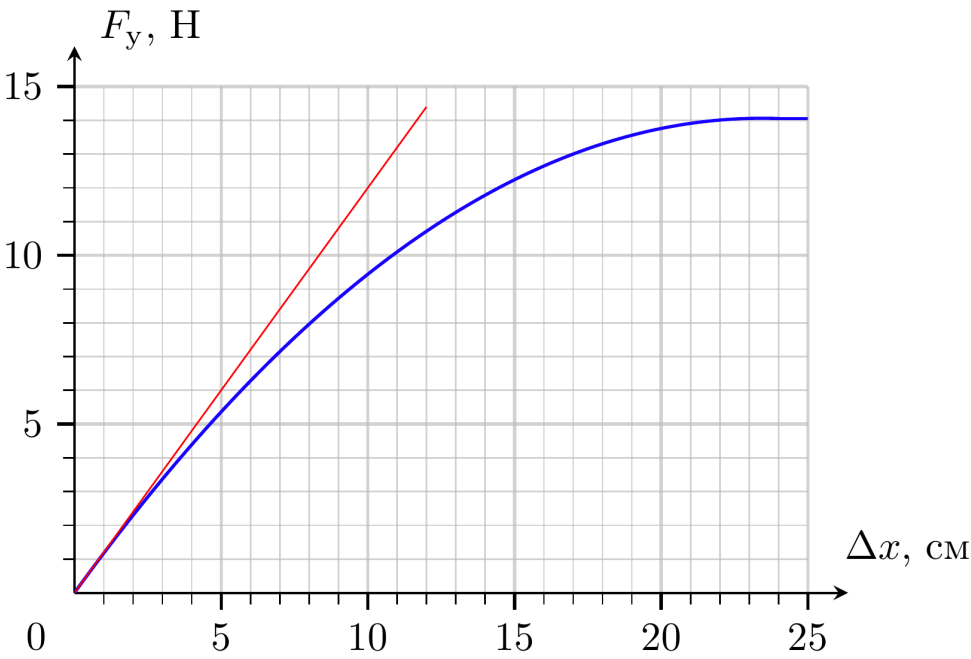
$$\Delta x = \frac{F}{2k_0 + k} \approx 2,9 \text{ мм.}$$

Тогда

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{k_0}{k}\Delta x = \frac{k_0 F}{(2k_0 + k)k} \approx 3,5 \text{ мм}$$

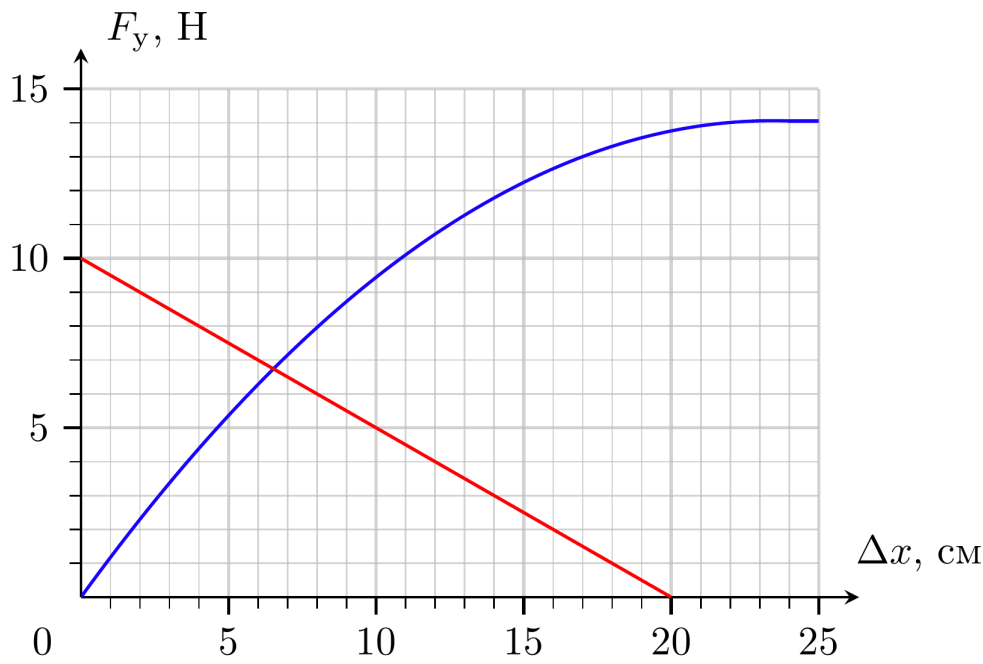
и

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 6,4 \text{ мм.}$$



Ответ: $\Delta x \approx 2,9$ мм, $\Delta x_1 \approx 3,5$ мм, $\Delta x_2 \approx 6,4$ мм.

Для нахождения растяжений при $F = 20$ Н построим зависимость (1') (аналог нагрузочной прямой из электричества) на графике из условия.



Пересечение этих прямой и кривой позволяет найти силу упругости ленты $F_1 \approx 6,7$ Н и её удлинение

$$\Delta x \approx 6,5 \text{ см.}$$

Следовательно, удлинение первой пружины

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} \approx 6,7 \text{ см}$$

и удлинение второй пружины

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 13,2 \text{ см.}$$

Ответ: $\Delta x = 6,5$ см, $\Delta x_1 = 6,7$ см, $\Delta x_2 = 13,2$ см.

2?? С какой максимальной внешней силой F_{max} можно растягивать систему, если лента рвётся при удлинении $\Delta x_{\text{max}} = 25$ см?

Угловой коэффициент прямой ($1'$) не зависит от прикладываемой силы. Проведём прямую с таким угловым коэффициентом через крайнюю точку графика (25 см, 14 Н) либо решим уравнение аналитически, подставив в соответствующие значения.

$$F_1 = \frac{F_{\text{max}}}{2} - \frac{k}{2} \Delta x_{\text{max}}.$$

Тогда максимальная сила:

Ответ: $F_{\text{max}} = 53$ Н.

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.



1 ?? Определите скорость движения втулки в начальный момент времени, когда колечко движется вблизи вершины прямого угла.

За небольшое время Δt колечко пройдет расстояние $v\Delta t$, оставив позади себя кусочек нити длиной $v\Delta t$. Такой же по длине кусочек нити должен освободиться из-за приближения втулки к колечку. Значит, $u(0)\Delta t = v\Delta t$, и:

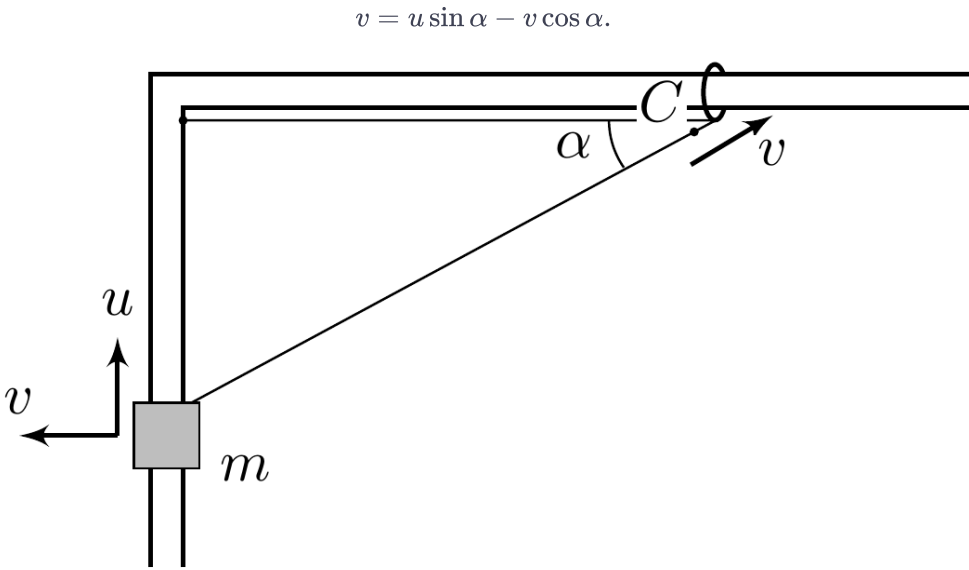
Ответ:

$$u(0) = v.$$

2 ?? Как зависит скорость движения втулки от угла α ?

Способ 1

Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком. В этой СО колечко неподвижно, а у втулки появляется составляющая скорости, перпендикулярная стержню (см. рисунок). При этом относительно точки C , выбранной вблизи колечка, втулка движется по окружности. Проекции скоростей втулки и точки C на направление участка нити между втулкой и кольцом должны компенсировать друг друга так, чтобы длина этого участка оставалась постоянной. Точка C движется со скоростью v , поэтому:



Способ 2

Пусть расстояния от вершины прямого угла до колечка и до втулки равны соответственно x и y . Тогда запишем полную длину нити следующим образом:

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = l.$$

Возьмём производную по времени:

$$\dot{x} + \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dot{l} = 0;$$

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x);$$

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x).$$

$$u = v\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = v\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Способ 3

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt . Колечко прошло расстояние $v\Delta t$, а втулка $u\Delta t$. Проецируя эти перемещения на отрезок, соединяющий колечко с ниткой, получим маленькое изменение длины куска нити между ними:

$$\Delta R = v\Delta t \cos \alpha - u\Delta t \sin \alpha$$

Кусок нити между вершиной прямого угла и колечком увеличился на $v\Delta t$. Так как полная длина нити не меняется:

$$(v \cos \alpha - u \sin \alpha + v)\Delta t = 0$$

Откуда:

Ответ:

$$u = v\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

3 ?? Чтобы колечко двигалось с постоянной скоростью v , к нему прикладывают силу F , направленную вдоль стержня. Как зависит сила F от угла α ?

Способ 1

Скорость втулки при её движении по окружности относительно точки C равна:

$$v \sin \alpha + u \cos \alpha = v \frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = v \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Нормальная компонента ускорения:

$$a_n = \frac{v^2 (1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha \cdot R},$$

где $R = \frac{l}{1 + \cos \alpha}$ — длина участка нити между втулкой и точкой C .

Полное ускорение втулки a направлено вдоль стержня, а a_n является его проекцией на нить. Поэтому

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{v^2 (1 + \cos \alpha)^3}{\sin^3 \alpha \cdot l}.$$

Способ 2

Воспользуемся полученной в предыдущем пункте связью u и v :

$$u = \frac{v}{y} (\sqrt{x^2 + y^2} + x) = v \frac{l}{y}.$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$a = -vl \frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{v^2 l^2}{y^3}.$$

Так как нить нерастяжима:

$$l = \frac{y}{\sin \alpha} + \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow y = \frac{l \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Тогда:

$$a = \frac{v^2 (1 + \cos \alpha)^3}{\sin^3 \alpha \cdot l}.$$

Далее $ma = T \sin \alpha$, откуда

$$T = m \frac{v^2 (1 + \cos \alpha)^3}{\sin^4 \alpha \cdot l}$$

Сила F , прикладываемая к колечку, равна сумме проекций двух сил натяжения на стержень:

$$F = T + T \cos \alpha.$$

Ответ:

$$F = m \frac{v^2 (1 + \cos \alpha)^4}{l \sin^4 \alpha}$$



1 ?? давление жидкости на дне сосудов;

Зависимость плотности от температуры:

$$\rho(t) = \rho_0 - \frac{\rho_0}{2} \cdot \frac{t - t_0}{t_0} = \rho_0 \frac{3t_0 - t}{2t_0}. \tag{1}$$

Начальная масса m_{L0} жидкости в левом сосуде:

$$m_{L0} = 4Sh\rho_0 = 4SH\rho.$$

Следовательно сосуд большего сечения заполнится доверху, когда плотность в нём уменьшится до $\rho = 0,95\rho_0$. Из (1) получаем:

$$\rho = 0,95\rho_0 \Rightarrow 3t_0 - t_1 = 1,9t_0 \Rightarrow t_1 = 1,1t_0.$$

После этого жидкость начинает перетекать из левого (широкого) сосуда в правый. При достижении температуры $t = 2t_0$ масса m_L жидкости в левом сосуде равна:

$$m_L = 4SH \cdot \frac{\rho_0}{2} = 2\rho_0SH.$$

Полная масса m жидкости изначально:

$$m = (4S + S)h\rho_0 = 5S \cdot 0,95H\rho_0 = 4,75\rho_0SH.$$

Следовательно, масса m_R жидкости в правом сосуде после нагрева:

$$m_R = m - m_L = 2,75\rho_0SH.$$

Тогда давление на дне:

Ответ:

$$p_{\text{дно}} = \frac{m_R g}{S} = 2,75\rho_0 gH.$$

2 ?? давление жидкости на крышку в сосуде большего сечения;

Давление $p_{\text{к}}$ жидкости на крышку в сосуде большего сечения найдём из равенства давлений:

Ответ:

$$p_{\text{к}} = p_{\text{дно}} - 0,5\rho_0 gH = 2,25\rho_0 gH.$$

3 ?? температуру жидкости в сосуде меньшего сечения.

Поскольку объём левого сосуда фиксирован (при достижении высоты H), уменьшение массы в нём прямо пропорционально уменьшению плотности при нагреве. При нагреве левого сосуда на малую величину Δt плотность уменьшается на $\Delta \rho$, и в правый сосуд перетекает масса:

$$\Delta m = 4SH \Delta \rho, \tag{2}$$

температура которой равна текущей температуре t в левом сосуде.

Способ 1

Можно считать, что нагреватель сообщил количество теплоты массе Δm уже после того, как она переместилась в правый сосуд. Тогда количество теплоты, поступающее в правый сосуд:

$$\Delta Q = c\Delta m (t - t_0) = 4cSH(t - t_0)\Delta \rho,$$

где c — теплоёмкость жидкости.

Если воспользоваться графиком зависимости $\rho(t)$, то можно заметить, что величине ΔQ пропорциональна площадь полоски шириной $\Delta \rho$ и длиной $t - t_0$ (см. рисунок 1), домноженной на $4cSH$.

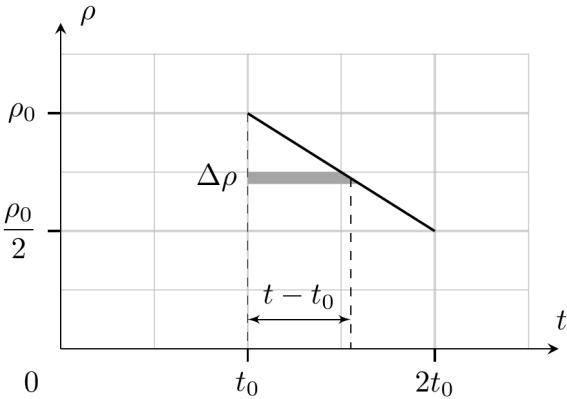


Рис. 1

Полное количество «перенесённой» в правый сосуд теплоты Q пропорционально площади трапеции, показанной на рисунке 2, с домножением на $4cSH$. Тогда:

$$Q = 0,99\rho_0t_0cSH.$$

Эта теплота, распределённая по массе $m_R = 2,75\rho_0SH$, повысит температуру правого сосуда:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R} = t_0 + \frac{0,99\rho_0t_0cSH}{c \cdot 2,75\rho_0SH}.$$

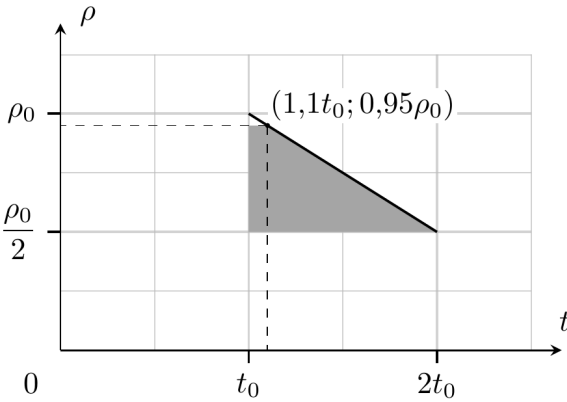


Рис. 2

Способ 2

Из (1) и (2) получим, что при повышении температуры левого сосуда от $t_1 = 1,1t_0$ до $t_2 = 2t_0$ масса, перетекающая в правый сосуд, увеличивается равномерно с температурой:

$$\Delta m = \frac{2SH}{t_0} \cdot \Delta t.$$

Следовательно, распределение масс по температуре равномерное, и средняя температура приходящих порций жидкости равна среднему арифметическому концов интервала:

$$t_{\text{cp}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1,1t_0 + 2t_0}{2} = 1,55t_0.$$

Уравнение теплового баланса для правого сосуда:

$$m_{R0}c(t_R - t_0) + \Delta mc(t_R - t_{\text{cp}}) = 0,$$

где m_{R0} — начальная масса жидкости в правом сосуде.
Отсюда:

$$t_R = \frac{m_{R0}t_0 + \Delta m t_{\text{cp}}}{m_{R0} + \Delta m}.$$

Способ 3

Малая масса, перетекающая при возрастании температуры на dt :

$$dm = -4SH \, d\rho.$$

Из (1):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_0}{2t_0} \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{2\rho_0SH}{t_0} \, dt.$$

Количество теплоты, переносимое этой массой:

$$dQ = c(t - t_0) \, dm = c(t - t_0) \frac{2\rho_0SH}{t_0} \, dt.$$

Интегрируем от $t_1 = 1,1t_0$ до $2t_0$:

$$Q = \frac{2\rho_0SHc}{t_0} \int_{1,1t_0}^{2t_0} (t - t_0) \, dt = \frac{2\rho_0SHc}{t_0} \left[\frac{(t - t_0)^2}{2} \right] \Big|_{1,1t_0}^{2t_0}.$$

Подставляем пределы:

$$Q = \frac{2\rho_0SHc}{t_0} \cdot \frac{t_0^2 - 0,01t_0^2}{2} = 0,99\rho_0ct_0SH.$$

Далее, как и в первом способе:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$t_R = 1,36t_0.$$

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.



1 ?? Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{верх}}$ через резистор $2R$ между узлами A и O , если регулируемый ток увеличить на ΔI . Ответ выразите через ΔI .

Способ 1

Воспользуемся методом наложения токов. Представим два независимых источника тока: один создаёт ток силой I_0 , другой — регулируемый ток I (см. рисунок 1). При расстановке токов учтём, что часть цепи для каждого источника представляет собой сбалансированный мост.

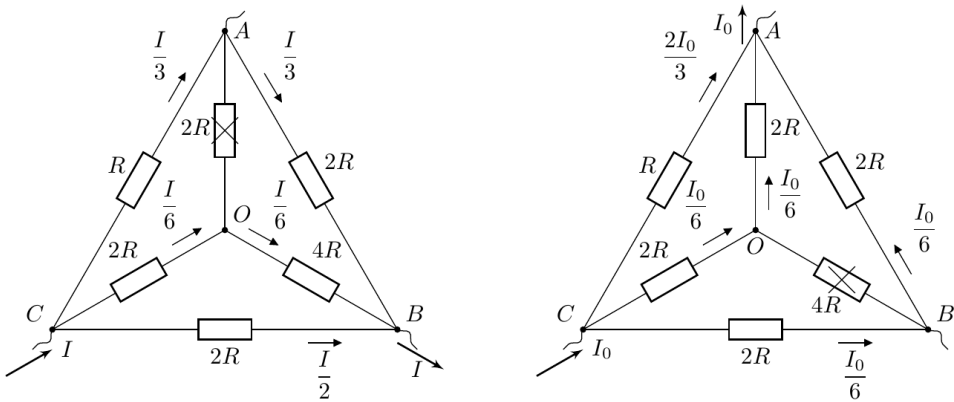


Рис. 1

Способ 2

Введём токи I_1 и I_2 , далее, с учётом первого и второго правил Кирхгофа выразим через них токи во всех остальных участках разветвлённой цепи (см. рисунок 2).

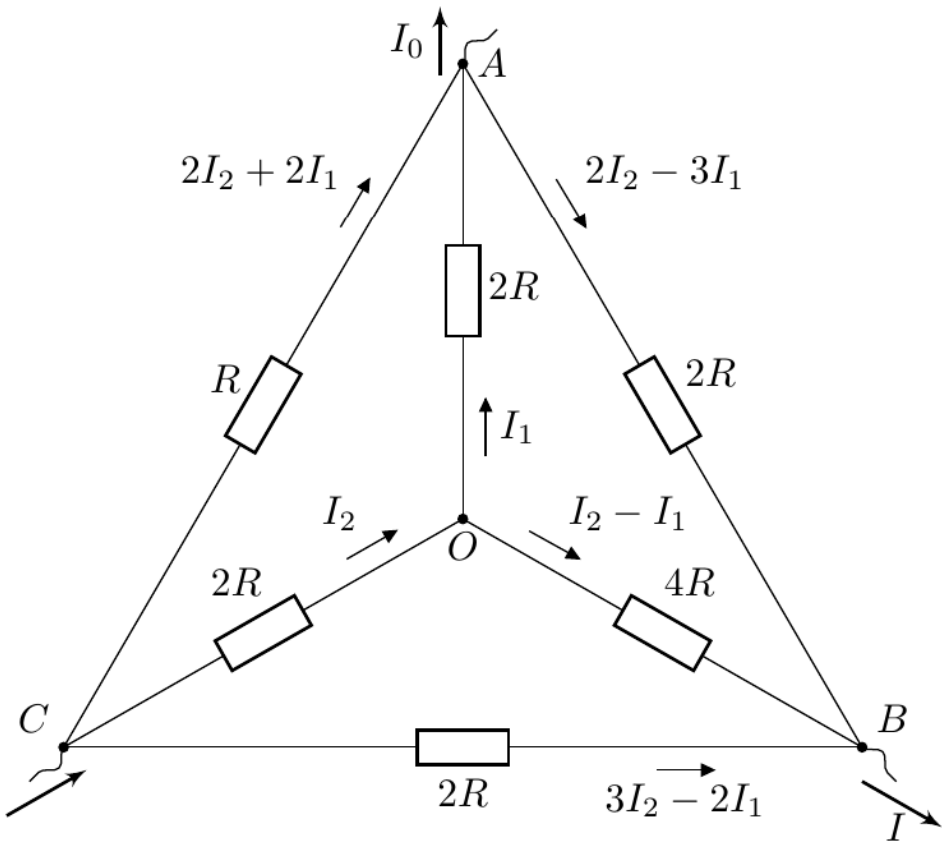


Рис. 2

Запишем первое правило Кирхгофа для узлов A и B и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2I_2 + 2I_1 + I_1 = I_0 + 2I_2 - 3I_1 \\ 3I_2 - 2I_1 + I_2 - I_1 + 2I_2 - 3I_1 = I \end{cases}$$
$$\begin{cases} I_1 = \frac{I_0}{6} \\ I_2 = \frac{I + I_0}{6} \end{cases}$$

Тогда:

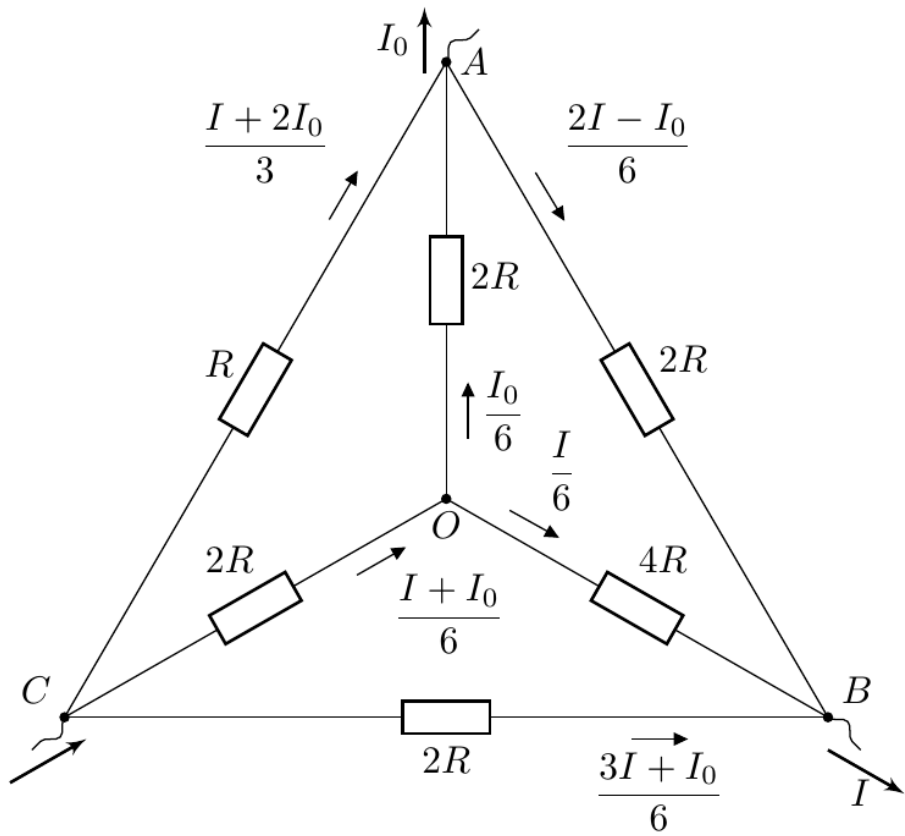


Рис. 3

Заметим, что ток I никак не влияет на силу тока через верхний резистор, следовательно:

Ответ:

$$\Delta I_{\text{верх}} = 0.$$

2?? Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{нижн}}$ через резистор $2R$ между узлами B и C , если регулируемый ток увеличить на ΔI . Ответ выразите через ΔI .

Изменение силы тока через нижний резистор

$$\Delta I_{\text{нижн}} = \Delta \left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6} \right)$$

Ответ:

$$\Delta I_{\text{нижн}} = \frac{\Delta I}{2}.$$

3?? При каком значении регулируемой силы тока $I' > 0$ ток в одном из резисторов становится равным нулю? Укажите этот резистор. Ответ выразите через I_0 .

Единственный резистор, через который токи от двух источников направлены противоположно, — это резистор $2R$ между узлами A и B . Условие обнуления тока:

$$I'/3 = I_0/6.$$

Таким образом

Ответ: $I' = I_0/2$; резистор $2R$ между узлами A и B .

4?? При каком значении регулируемой силы тока I^* суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, будет минимальна? Чему равна эта минимальная мощность P_{min} ? Ответы выразите через I_0 и R .

Способ 1

Мощность можно рассчитать как сумму мощностей воображаемых источников токов I_0 и I . Напряжение между узлами B и C :

$$U_{BC} = \left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6} \right) \cdot 2R,$$

а между узлами A и C :

$$U_{AC} = \left(\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3} \right) \cdot R.$$

Тогда суммарная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи равна:

$$P(I) = U_{BC}I + U_{AC}I_0 = RI^2 + \frac{2}{3}II_0R + \frac{2}{3}RI_0^2$$

.

Способ 2

Тот же результат можно получить как сумму тепловых мощностей на каждом резисторе:

$$P(I) = R\left(\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3}\right)^2 + 2R\left(\frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{6} + \frac{I_0}{6}\right)^2 + 4R\left(\frac{I}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{3} - \frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6}\right)^2$$

Минимум выражения $P(I)$ (вершина параболы) достигается при:

$$I^* = -\frac{I_0}{3}$$

.

Соответствующая минимальная мощность:

Ответ:

$$P_{\min} = P(I^*) = \frac{5}{9}RI_0^2;$$
$$I^* = -\frac{I_0}{3}.$$

 Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.